Problema 1. Masa lui Saturn

Când Galileo Galilei, folosind un telescop, a observat pentru prima dată inelul lui Saturn, a fost un eveniment astronomic minunat! Inelul nu este un corp rigid. El este alcătuit din nenumărate particule care se rotesc în jurul planetei pe orbite keppleriene, așa cum au arătat observațiile lui Aristarkh, Belopolsky și Keeler. Rezultatele lui Keeler au fost publicate în Astrophysical Journal, în anul 1895. În această problemă, repetând argumentele observațiilor recente, trebuie să se estimeze masa planetei Saturn.

Planeta Saturn a fost observată cu ajutorul telescopului de 2,5 m (**N**ordic **O**ptical **T**elescop din La Palma, Insulele Canare), în ziua de 25 februarie 2002, la ora 23:25 UT. O fantă spectroscopică a fost plasată peste imaginea planetei, așa cum indică desenul din Figura 1 , unde W – West și E – Est. În desenul din figura alăturată este prezentat spectrul luminii solare, după reflexia pe suprafața planetei Saturn. Lungimile de undă cresc spre dreapta. Liniile drepte verticale sunt linii de absorbție terestră, adică liniile obținute pe Pământ după ce lumina solară reflectată de Saturn traversează atmosfera Pământului și ajunge la observator. Liniile înclinate sunt liniile luminii solare de lângă planeta Saturn, reflectate după absorbția pe suprafața lui Saturn.

Cele două linii puternice de absorbție existente în spectru provin de la tranzițiile D_2 și D_1 ale Na I (sodiu neutru), având lungimile de undă, corespunzătoare repausului, $\lambda_{02} = 589{,}00\,\mathrm{nm}$ și respectiv $\lambda_{01} = 589{,}59\,\mathrm{nm}$.

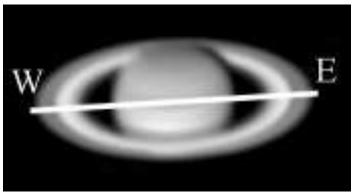


Figura 1

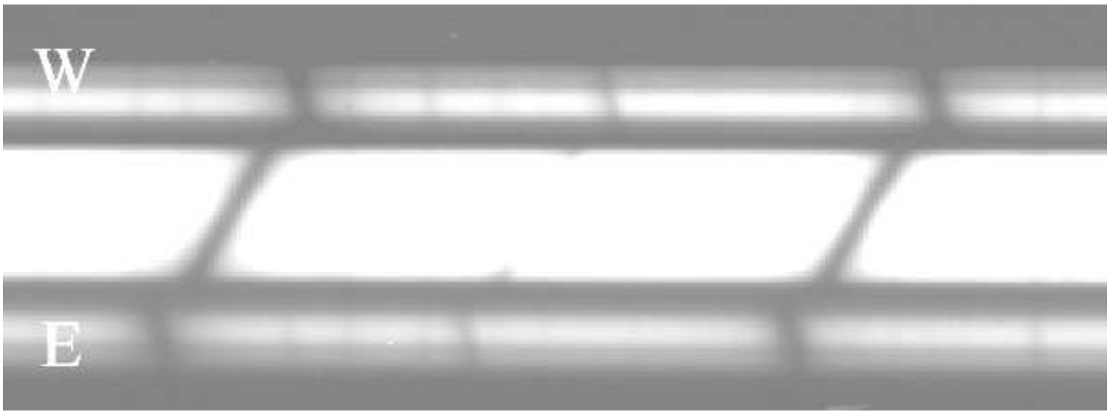


Figura 2 Spectrul luminii prin fanta W E

a) Spectrul dat în **Error! Reference source not found.** sugerează că inelul lui Saturn nu este un corp rigid aflat în mișcare de rotație. *Să se ilustreze* calitativ printr-un desen, forma spectrului, dacă inelul lui Saturn ar fi un corp solid, aflat în mișcare de rotație.

b) Inelul lui Saturn este plan și paralel cu planul ecuatorului. *Să se calculeze* înclinația sistemului în raport cu linia de vedere a observatorului.

c) *Să se estimeze* lungimea diametrului lui Saturn, utilizând spectrul dat, dacă perioada rotației proprii a lui Saturn este $T_{\text{rotatie proprie, Saturn}} = 10{,}66\,\mathrm{h}$.

d) *Să se estimeze* masa lui Saturn, utilizând spectrul dat. Dacă nu se cunoaște constanta atracției gravitaționale, *K*, se știe că: $1\,\mathrm{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{6}\ \mathrm{km}$; $M_{\mathrm{Soare}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$.

Problema 2. Refracția atmosferică în jurul unei planete

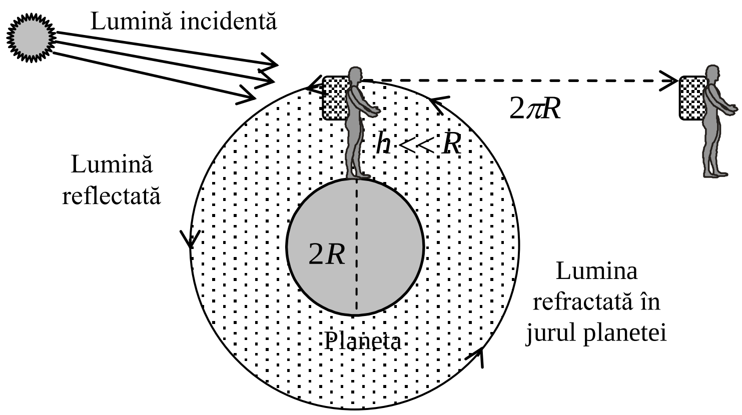
Refracția luminii în atmosfera unei planete este un fenomen optic cu consecințe cunoscute, având drept cauză neomogenitatea optică a atmosferei planetei. Ca urmare, propagarea luminii în atmosfera oricărei planete nu este rectilinie, ea făcându-se în acord cu principiul lui Fermat.

Ar putea exista o planetă cu o atmosferă în care, datorită refracției, razele de lumină să se curbeze atât de mult încât ele să se propage în jurul planetei, întorcându-se în punctul de plecare?

Se neglijează absorbția luminii. Se consideră că structura atmosferei este stabilă.

Dacă da, atunci un astronaut de pe această planetă, reprezentat în desenul din **figura 3,** ar constata cu uimire că, privind în depărtare, în fața sa, el își va vedea rucsacul din spatele său.

Fenomenul semnalat, pe care îl vom denumi „**refracție atmosferică în jurul unei planete**“, s-ar



produce privind într-adevăr departe, la distanța $2\pi R$, unde R este raza planetei.

Dacă totul se întâmplă așa cum indică desenul din figura 4, ca urmare a refracției luminii prin mediul gazos de la baza atmosferei planetei, frontul de undă plan, AB, al undei electromagnetice, trebuie să rămână mereu perpendicular pe suprafața planetei și la aceeași distanță față de aceasta (frontul A′B′), deși el se propagă printr-o atmosferă neomogenă (dar cu straturi sferice concentrice, foarte subțiri, omogene).

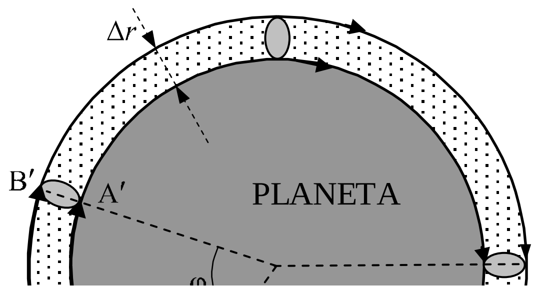


figura 3

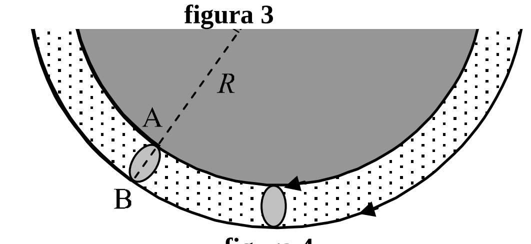


figura 4

Pentru că indicele de refracție al vidului este $n_{\text{vid}} = 1,$ înseamnează că indicele de refracție al gazului de la baza atmosferei oricărei planete este $n > 1$ tocmai datorită prezenței moleculelor mediului gazos. Ca urmare, diferența celor doi indici de refracție (diferența față de unitate a indicelui de refracție al mediului gazos de la baza atmosferei planetei) trebuie să fie direct proporțională cu concentrația moleculelor de gaz de la baza atmosferei planetei:

$$n - 1 = \alpha N, \qquad (1)$$

unde N este concentrația moleculelor de gaz de la baza atmosferei planetei, iar α este o constantă de proporționalitate, a cărei semnificație fizică trebuie stabilită.

Din determinări experimentale, efectuate la baza atmosferei Pământului, se știe că, pentru gazul de la baza atmosferei Pământului:

$$n-1 \approx 11{,}35\cdot 10^{-5}.$$

Pentru un număr de 10 planete (8 din Sistemul Solar şi 2 exoplanete), se cunosc datele înscrise în tabelul alăturat, unde: $R-$raza planetei, exprimată în m; $m-$masa unei molecule a gazului dominant la baza atmosferei planetei, exprimată în unități atomice de masă ($1\text{uam} = 1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg); $p-$presiunea atmosferică la suprafața planetei, exprimată în bar (1 bar = 10^5 Pa = $10^5\ \text{Nm}^{-2}$); $T-$temperatura atmosferei, la baza acesteia, exprimată în K; $g-$accelerația gravitațională la suprafața planetei, exprimată în ms^{-2}; $d-$diametrul moleculei gazului, exprimat în m.

Se cunoaște: constanta lui Boltzman, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ J/K.

Planeta	R m	Gazul comp	m uam	p bar	T K	g m/s^2	d m
Pământ	$64\cdot 10^5$	N_2	28	1	300	9,8	$3\cdot 10^{-10}$
Venus	$62\cdot 10^5$	CO_2	44	100	700	8,5	$3{,}75\cdot 10^{-10}$
Marte	$34\cdot 10^5$	CO_2	44	10^{-2}	200	3,7	$3{,}75\cdot 10^{-10}$
Jupiter	$715\cdot 10^5$	H_2	2	1	340	23	$2\cdot 10^{-10}$
Uranus	$26\cdot 10^6$	H_2	2	1000	50	8,8	$2\cdot 10^{-10}$
Saturn	$60\cdot 10^6$	H_2	2	1000	400	10,4	$2\cdot 10^{-10}$
Mercur	$2{,}4\cdot 10^6$	CO_2	44	10^{-14}	450	3,7	$3{,}75\cdot 10^{-10}$
Neptun	$25\cdot 10^6$	H_2	2	1000	70	11,1	$2\cdot 10^{-10}$
Exoplaneta X	$72{,}5\cdot 10^5$	N_2	28	15	500	20	$3\cdot 10^{-10}$
Exoplaneta Y	$25{,}75\cdot 10^5$	CH_4	16	20	600	15	$4\cdot 10^{-10}$

Utilizând informațiile numerice din tabelul dat, va trebui *să analizați* și *să justificați* posibilitatea sau imposibilitatea producerii refracției luminii în jurul fiecăreia dintre planetele precizate, lumina propagându-se prin stratul de gaz de la baza fiecărei planete. Pentru aceasta veţi răspunde la următoarele întrebări:

a) *Să se stabilească* condiția necesară producerii refracției luminii în jurul unei planete, dacă pentru o variație mică a distanței față de suprafața planetei Δr corespunde variația indicelui de refracție al mediului gazos al atmosferei planetei Δn, lângă suprafața planetei.

b) *Să se exprime* condiția anterioară în funcție de proprietățile fizice ale gazului de la baza atmosferei planetei (presiune, temperatură, concentrație a moleculelor, masă a moleculelor). Se știe că indicele de refracție, n, al mediului gazos de la baza atmosferei fiecărei planete nu diferă foarte mult față de unitate.

c) *Să se stabilească* semnificația constantei de proporționalitate α, din relația (1), în funcție de volumul moleculei de gaz din componența atmosferei fiecărei planete, la suprafața acestora.

d) *Să se calculeze* valorile numerice ale mărimilor care justifică posibilitatea sau imposibilitatea producerii refracțiilor atmosferice ale luminii în jurul fiecărei planete din tabel. Indică pe ce planete apare fenomenul.

Problema 3. Ceea ce Newton n-a ştiut!

Mişcarea de revoluţie a Lunii în jurul Pământului este însoţită de o mişcare de rotaţie a Lunii, în jurul unei axe proprii, sensurile celor două mişcări fiind identice.

Elipsa din figura alăturată reprezintă traiectoria centrului Lunii, în mişcarea sa, ca rezultat al interacţiunii gravitaţionale cu planeta Pământ. În focarul F_1 al acestei elipse se află centrul Pământului. În poziţia iniţială, centrul Lunii coincide cu perigeul elipsei.

După un anumit timp centrul Lunii a ajuns pe elipsă în poziţia L, iar raza vectoare $\vec{r}$ a centrului Lunii s-a rotit cu unghiul θ. În acelaşi interval de timp, Luna s-a rotit în jurul axei proprii (perpendiculară pe planul desenului), cu un unghi δ, evidenţiat în desen ca fiind unghiul cu care s-a rotit, în planul orbitei Lunii, axa de referinţă din secţiunea orbitală a Lunii. Ca urmare, direcţia axei de referinţă din planul secţiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei, într-un punct C din apropierea focarului F_2 al acesteia.

Concluzie: atunci când Luna se deplasează în jurul Pământului, punctul C se deplasează de-a lungul axei mari a elipsei, oscilând de o parte şi de cealaltă parte a focarului F_2, evidenţiind astfel rolul celui de al doilea focar al elipsei, F_2, rol despre care Newton n-a ştiut!

a) *Să se determine* intervalele valorilor distanţei Δ, în stânga şi în dreapta focarului F_2, dacă Δ reprezintă distanţa de la punctul C până la focarul F_2, într-un moment oarecare, pe durata deplasării centrului Lunii de la Perigeu, până la Apogeu. *Să se analizeze* simetria acestor intervale, în raport cu focarul F_2 şi să se interpreteze rezultatul.

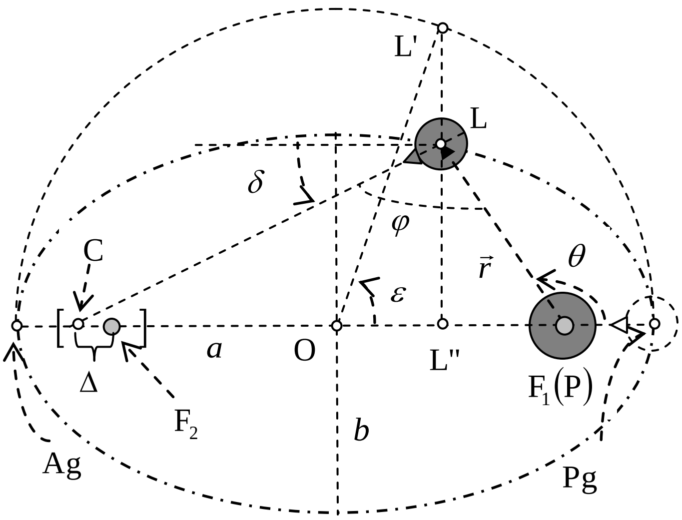


Figura 5

b) *Să se localizeze* pe elipsă, poziţia L_0 a centrului Lunii, pentru care direcţia axei de referinţă din planul secţiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei în focarul F_2 al acesteia.

Se ştie că: 1) relaţia dintre unghiurile θ şi ε, evidenţiate în desen, este $\cos\theta = \dfrac{\cos\varepsilon - e}{1 - e\cos\varepsilon}$, unde $e = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$ este excentricitatea numerică a elipsei; 2) aria suprafeţei descrisă de raza vectoare a centrului Lunii, până când centrul Lunii a ajuns în poziţia L, este $S = \dfrac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)$, unde *a* şi *b* sunt cele două semiaxe ale elipsei; 3) semiaxa mare a elipsei este $a = 384.400$ km; 4) pentru că excentricitatea numerică a elipsei este foarte mică, $e \approx 0{,}0549$, se va lucra, acceptând următoarea aproximaţie:

$$f(e) = \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - e - \cos\varepsilon \approx \frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3.$$